Y a-t-il un mathématicien-géomètre dans la salle ?

Is there a mathematician-geometer in the room?

Jean-Pierre Petit

We published in 2014 an article in Modern Physics Letters A (reference) which is moreover installed in Researchgate wbesite. This article is, in the passage, a stone thrown in the garden of black hole men, French or foreigners. Yet, right now, none of them reacts, in spite of direct calls to them.

Situons le problème. Le modèle du trou noir émerge d'une solution mathématique de l'Equation d'Einstein. Ou plutôt de deux solutions.

La première voit le jour en 1916, sous la plume de Karl Schwarzschild. Elle se réfère à une solution à symétrie sphérique, donc ne pourrait convenir pour un objet en rotation.

En 1967 le Néo Zélandais Roy Kerr produit une solution similaire, axisymétrique, qui peut alors se prêter à la description d'un objet relevant du bestiaire astronomique.

En effet, si les trous noirs existent, ils sont le résultat d'un processus d'implosion ou de fusion de deux objets. Le point de départ est l'étoile à neutrons. Aucun astrophysicien n'imaginerait qu'une étoile à neutrons exempte de rotation puisse exister. Résultat de l'implosion du cœur de fer d'une supernova ces objets sont comme la patineuse qui ramène ses bras le long de son corps. Et, de fait, la rotation des étoiles à neutrons est extrêmement rapide et peut atteindre 1000 tours par seconde.

Let us place the problem. The model of the black hole emerges from a mathematical solution of the Equation of Einstein. Or, more precisely, from two solutions.

Karl Schwarzschild published the first one in 1916. It is a sperically symmetric solution that could not fit rotating objet.

In 1967 Néo Zélandais Roy Kerr produced a similar solution, but axisymmetrical, which then may go with an material object that would belong to thee astronomical bestiary. Indeed, if black holes would exist, they would be the result of a process of implosion of an object (the core of a giant star), or mergerging of two objects (two neutron stars). The starting point is the neutron star. No astrophysicist would imagine that a non-rotating neutron star can exist. Resulting from the implosion of the iron heart of a supernova these objects ekoke the skater who returns his arms along his body. In effect, the rotation of neutron stars is extremely fast and can reach 1000 rotations per second.

Donc la métrique de Schwarzschild ne saurait être utilisée pour construire ce modèle théorique du trou noir, c'est un fait. Par contre cette solution géométrique possède tous les attributs qu'on prête à ce objet : son horizon des évènements, sa « sphère de Schwarzschild », le fait que sa pérennité soit fondée sur un découplage temporel. Si les trous noirs existent, ce sont des objets qui implosent en un millième de seconde mais seraient, pour un observateur extérieur « en arrêt sur image ».

Enfin la géométrie de Schwarzschild est censée recéler « en son centre » une mystérieuse singularité, physique et mathématique, sur lesquels de très beaux théorèmes ont été produits.

Dans l'article de Modern Physics Letters A nous avons fait disparaître cette singularité comme par un coup de baguette magique.

Thus the metrics of Schwarzschild could not be used to describe this theoretical model of the black hole. Anyway this geometrical solution possesses all the attributes which we lend to this object: its events' horizon, its" Schwarzschild's sphere". Its consistency is based on a temporal decoupling. If the black hole does exist, it is an object which implodes in a thousandth of second, measured in its « proper time » but appears be, for an distant observer eternal, " frozen in time ".

Finally the geometry of Schwarzschild is supposed to hide " in its center " a mysterious singularity, physical and mathematical, on which a lot of very beautiful theorems were produced.

> In 2014, in a paper published in Modern Physics Letters A we removed this so called central singularity as by a wave of the hand.

Si nous n'avons pas produit l'équivalent pour la solution de Kerr ça n'est pas parce que ce changement de variable, le même, n'a pas le même effet, mais parce que c'est un peu plus compliqué, moins évident.

Donc l'échappatoire des black hole men ne serait pas de dire :

- *D'accord, ce que vous montrez crée un fort doute sur l'existence de cette singularité centrale, pour la géométrie de Schwarzschild, mais la géométrie de Kerr est différente*

If we did not produce the equivalent for the solution of Kerr that is not because this change of variable (by the way the same) has no same effect, but because it is a little more complicated, less obvious.

Thus if black hole men would say:

- All right, what you show creates a strong doubt on the existence of this central peculiarity, for the geometry of Schwarzschild, but the geometry of Kerr is different.

Non, cela fonctionne de la même façon. Mais ce n'est pas de cela dont nous allons parler dans ce papier. Nous nous attendions à ce qu'il y ait des réactions face à ce premier

papier de 2014. Or, deux ans après sa parution le silence est sidéral. Pourtant l'évidence de l'élimination de cette singularité peut être perçue par des non spécialistes, disons ayant un niveau « mathématiques supérieures ». Et c'est à ces gens que nous nous adresserons ici.
Pour suivre ce qui va suivre on a besoin de savoir ce que sont :

- une dérivée
- une différentielle
- une dérivée de fonction de fonction
- une fonction logarithme et sa dérivée
- une fonction exponentielle et sa dérivée
- un développement en série de Taylor

C'est tout ...

La métrique de Schwarzschild, premier fondement du modèle du trou noir est, comme la métrique de Kerr une solution de l'équation d'Einstein sans second membre, donc se référant à une portion de l'espace où la densité d'énergie-matière est strictement nulle.

Elle ne dépend pas du système de coordonnées choisi. Cette métrique se réfère à un « objet géométrique » et le jeu de coordonnées est l'outil utilisé pour le décrire, pour « lire » cette géométrie, pour cartographier cette hypersurface. De même qu'un système de méridiens et de parallèles est l'outil qui permet d'appréhender une sphère S2.

Là on voit tout de suite une chose. Ce système de cartographie recèle des lieux singuliers : les pôles, où l'azimut, ou longitude est alors indéterminée. Se sont donc des lieux singuliers, mais cette singularité est issue du choix des coordonnées. Elle n'a pas de réalité physique. Les pôles sont donc des coordinate singularities.

Voici la métrique de Schwarzschild telle qu'elle émerge du calcul :

We can answer : « No, it works in the same way ». But it is not of it about which we are going to speak in this paper.

We expected that there are reactions after the publication of this first paper of 2014. Yet, two years after its publication the silence is sidereal.

Nevertheless this cancellation process of all singularities can be understood by non specialists, having a a minimum mathematical background

To follow what is going to follow you just need to know what are:

- A derivative

- A differential

- The derivative of a function of function

- What is a logarithmic function and how to derive it

- What is an exponential function and how to derive it

- What is a Taylor's expansion into a series.

That's all …

The metric of Schwarzschild, starting point of of the hole's model can be written :

$$ds^2 = (1 - \frac{R_s}{r})c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{(1 - \frac{R_s}{r})} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2$$

R_s est une constante, choisie comme étant positive, et identifiée à une longueur. C'est le « rayon de Schwarzschild ». Si cette solution s'organise autour d'un « objet » associé à une masse M (la masse du trou noir).

Alors :

Rs is a constant, chosen as being positive, and identified with a length. It is the " Schwarzschild's length ". If this solution gets organized around a "object" associated with a mass M (the mass of the black hole).

Then:

$$R_s = \frac{2\,G\,M}{c^2}$$

où G est la constante de la gravitation et c la vitesse de la lumière.

On voit ensuite apparaître quatre lettres qui sont autant de coordonnées

- le temps t
- une « distance radiale » r
- deux angles θ et φ

Au passage cette expression est bilinéaire en fonction des éléments différentiels dt , dr , $d\theta$, $d\varphi$. C'est une métrique riemanienne.

On peut l'écrire :

Where G is the constant of the gravitation and c the speed of light.

We then find four letters which compose the chosen coordinated system.

- The time t

- A "radial distance" r

- Two angles θ And φ

By the way this expression is bilinear with respect to the differential dt, dt, dr , dθ, dφ. It's a riemanian metric.

We can write it:

$$ds^2 = g_{tt}\, dt^2 + g_{rr}\, dr^2 + g_{\theta\theta}\, d\theta^2 + g_{\varphi\varphi}\, d\varphi^2$$

Les quantités g_{tt} , g_{rr} , $g_{\theta\theta}$, $g_{\varphi\varphi}$ sont des fonctions des coordonnées et leurs signes constituent ce qu'on appelle la *signature* de cette métrique.

- Si $r > R_S$ cette signature est $(+\ ---)$
- Si $r < R_S$ cette signature est $(-\ +\ --)$

The quantities g_{tt} , g_{rr} , $g_{\theta\theta}$, $g_{\varphi\varphi}$ are functions of the coordinates and their signs form what we call the signature of this metrics.

- If r > R_s this signature is (+ - - -)
- If r < R_s this signature is (- + - -)

Comme la solution « est issue d'une équation tensorielle » elle est coordinate invariant, elle peut être exprimée dans n'importe quel système de coordonnées. Mais on voit que dans le système choisi on rencontre deux problèmes.

Quand $r = R_S$ on a un dénominateur qui devient nul.

Même chose quand $r = 0$

Question : est-ce que ce pourraient être des coordinate singularities, des pseudo singularités qui résulteraient d'un mauvais choix de coordonnés ?

La question a été débattue depuis un siècle. Plusieurs changements de variable permettent d'éliminer la singularité en $r = R_S$, mais on considère que celle situe « au centre de l'objet » ne peut être éliminée, que c'est une true singularity.

Envisageons alors un changement de cordonnée affectant la coordonnée r qu'on transforme en coordonnée ρ.

As the solution " arises from a tensorial equation " it is coordinate invariant, and can be expressed through any system of coordinates.

But we see that in the chosen system we meet two problems.

When r = Rs we have a denominator which becomes zero.

Sam thing when r = 0

Question: would it be coordinate singularities, which would result from a bad choice of coordinates?

The question was discussed for a century. Several changes of variable allow to eliminate the singularity r = Rs, but people consider that the one that that takes places in the center of the object " cannot be eliminated, that it is a true singularity.

Let us envisage then the following coordinate change :

$$r = R_s \,(1 + Log \; ch \,\rho \,)$$

Notice that for a given positive value of r we get two symmetrical value of ρ

$$ds^2 = (\frac{r - R_s}{r})c^2 dt^2 - \frac{r}{r - R_s} dr^2 - r^2 \,(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2 \,)$$

Let's calculate dr :

$$d r = R_s \, d(\, Log \; ch \,\rho \,) = R_s \frac{d(ch\,\rho)}{ch\,\rho}$$

The $d(ch\,\rho)$

$$ch\,\rho = \frac{e^{\rho} + e^{-\rho}}{2} \qquad d(ch\,\rho) = \frac{e^{\rho} - e^{-\rho}}{2} d\,\rho = sh\,\rho \, d\,\rho$$

Then:

$$d r = R_s \frac{d(ch\,\rho)}{ch\,\rho} = R_s \, th\,\rho \, d\,\rho$$

The line element becomes :

$$ds^2 = \frac{Log\,ch\rho}{1 + Log\,ch\rho} \, c^2 dt^2 - \frac{1 + Log\,ch\rho}{Log\,ch\rho} R_s^2 \, th^2\rho \, d\rho^2 - R_s^2 \,(1 + Log\,ch\rho)^2 (\, d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2 \,)$$

We get $ch\,\rho \geq 1$

When $\rho \to \pm\infty$ $\quad th\rho \to \pm 1$ $\quad ch\rho \to e^{\rho}$ $\quad Log(ch\rho) \to \rho$ $\quad r \cong R_s \rho$

The line element tends to :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R_s^2 \, d\rho^2 - R_s^2 \, \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2)$$

c'est à dire une métrique de Lorentz, ce qui traduit la satisfaction des lois de la Relativité Restreinte.

La valeur $\rho = 0$ correspond à $r = R_s$

Que se passe-t-il quand ρ tend vers zéro ?

Effectuons les expansions en séries de Taylor :

That is a Lorentzian metric, which fits Special Relativity features.

The value $\rho = 0$ corresponds to r = Rs

What happens when ρ tends to zero ?

Let us make the following expansions into Taylor's series :

$$e^{\rho} = 1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + etc... \qquad e^{-\rho} = 1 - \rho + \frac{\rho^2}{2!} - \frac{\rho^3}{3!} + etc...$$

$$ch\,\rho = 1 + \frac{\rho^2}{2} + etc \; ... \qquad Log(ch\rho) = \frac{\rho^2}{2} + etc \; ...$$

$$sh\rho = \rho + etc \; ... \qquad th\rho = \rho + etc \; ...$$

Around $\rho = 0$ the line element becomes :

$$ds^2 = \frac{\rho^2}{2} c^2 dt^2 - \frac{2R_s^2}{\rho^2} \rho^2 d\rho^2 - R_s^2 \, (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2)$$

or :

$$\boxed{ds^2 = \frac{\rho^2}{2} c^2 dt^2 - 2R_s^2 \, d\rho^2 - R_s^2 \, (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2)}$$

La métrique devient ainsi régulière pour toutes les valeurs de ρ .Toutes les singularités disparaissent. On peut montrer que dans le système de coordonnées $\{t, \rho, \theta, \varphi\}$ les géodésiques sont régulières. En conclusion

La soi-disant singularité en $r = R_s$ n'est pas une singularité vraie
mais est due à un mauvais choix de coordonnées.

On voit que la description classique de la géométrie de Schwarzschild à l'aide de coordonnées

So that the metric becomes regular for any value of . All singularities are cancelled. It can be shown that the associated geodesic system, in $\{t, \rho, \theta, \varphi\}$ coordinates, is regular.

Oppositively the description of the solution through $\{t, r, \theta, \varphi\}$ coordinates induces a wrong topological description of the object.

Ceci provoque un changement de la signature pour certaines valeurs d'une « coordonnée radiale. Corrélativement, certaines quantités deviennent imaginaires ce qui signifie qu'on est alors « hors hypersurface ».

A l'inverse, dans le nouveau système de coordonnées aucune quantité imaginaire n'émerge. Cette structure géométrique se présente alors comme un « pont » entre deux espace temps Lorentziens. Dans une description où on conserverait la variable *r*, ceci représenterait la réunion, de deux espaces « bordés » selon une sphère de gorge, la sphère de Schwarzschild.

De même que dans un tore on a la réunion de deux espaces affectant la forme de deux bandes circulaires, bordées par deux cercles. Le recollement s'effectue alors le long d'un cercle de gorge et d'un cercle de jante.

Dans le système des coordonnées $\{t, \rho, \theta, \varphi\}$ l'image de cette sphère de gorge $r = R_s$ est alors un point, correspondant à la valeur$\rho = 0$.

En ce point le déterminant de la métrique est nul, ce qui va de pair avec une relation d'énantiomorphie entre les deux secteur $\rho > 0$ et $\rho < 0$.

The $\{t, \rho, \theta, \varphi\}$ coordinate system goes with a change of the signature for certain values of a "radial distance ». Correlatively, certain quantities become imaginary what means that we are then « out of the hypersurface ".

On the contrary, in the new coordinate system no imaginary quantity emerge. This geometrical structure appears then as a "bridge" between two space Lorentzian space-times (Minkowski's spaces). In a description where we would decide to keep(the r coordinate, this would represent the association, of two spaces connected along a throat sphere, the Schwarzschild sphere.

As well as in a torus we have the meeting of two spaces affectingthe shape of two circular bands, that can be connected along lined two circles. The connexion is then made along a throat circle and a wheel rim.

In the the new coordinate $\{t\,,\rho\,,\theta\,,\,\varphi\}$ the image the throat sphere, corresponding to r = Rs is then a point, corresponding to the value ρ = 0.

In this point the determinant of the metrics is zeo, which goes withe enantiomrphic relationship between the sectors $\rho >$ 0 and ρ 0.

Conjecture :

Il y a une série de questions que j'aimerais poser à des mathématiciens géomètres, en séminaire.

- Est-ce que la signature d'une métrique riemanienne, solution de l'équation d'Einstein est un attribut intrinsèque de la géométrie à laquelle elle se réfère ?

- Est-ce, si dans un système de coordonnées choisi, quand dans une région on constate une modification de cette signature on n'est pas « hors hypersurface » ?

- Est-ce qu'il n'existe pas une ensemble de systèmes de coordonnées qui préservent la signature et qui s'avéreraient alors plus aptes à décrire cette géométrie.

- Est-ce qu'il n'est pas a priori plus sain de rechercher une lecture où les singularités disparaissent ?

- Est-ce qu'on peut décrire cette hypersurface en utilisant deux jeux de coordonnées ? Est-ce que ça n'est pas plus « sain » de chercher à décrire toute l'hypersurface avec un jeu unique ?

- Dans l'exemple ci-dessus il est clair que le nouveau jeu de coordonnées implique une description de l'objet différente au point de vie topologique

- Est-ce que le choix d'une jeu de coordonnées n'implique pas une hypothèse topologique sous-jacente (avec cette variable *r,* que cet objet ait un « centre »)

- Corrolaire : est qu'une solution métrique de l'équation de champ ne contient pas, implicitement, une information concernant sa topologie (celle qui permet l'élimination des singularités) ?

  A ce jour je n'ai pus avoir aucun commentaire de black hole men, français ou étrangers et je suis à la recherche d'un séminaire de géométrie où ces questions pourraient être envisagées.

Conjecture :

There is a series of questions that I would like to sbmit to mathematicians and specially to tolologists, in seminar.

- Given a riemanian solution of Einstein's equation. Is its signature an intrinsic attribute ? Has any signature change a physical meaning?

- If, in a given set of coordinates, a signature's change occurs, would'nt it mean that this is out of the hypersurface ?

- Among an infinite number of coordinate systems, is it a subsystem that would keep the signature unchanged and that would provide a « better » description of the underlying geometry ?

- Is it a « good » goal to try to find a coordinated system that cancels singularities ?

- In order to describe this geometry isin't « better » to search a unique set of coordinates that woild cover the whole ?

- When a solution of Einstein's equation is expressed through a set of coordinates, does'nt imply an underlying topological structure ?

At the present tim I never received an answer to such questions

Post Scriptum :

On peut maintenant aborder le problème sous un autre angle. Supposons qu'en 1916 Schwarzschild a recherché une solution avec le système de coordonnées $\{t, \rho, \theta, \varphi\}$. Ce sont seulement des lettres. La mécanique calculatoire qui permet d'arriver à la solution de l'équation d'Einstein représente juste un jeu avec ces lettres, en accord avec une syntaxe. Schwarzschild serait alors arrivé à la formulation :

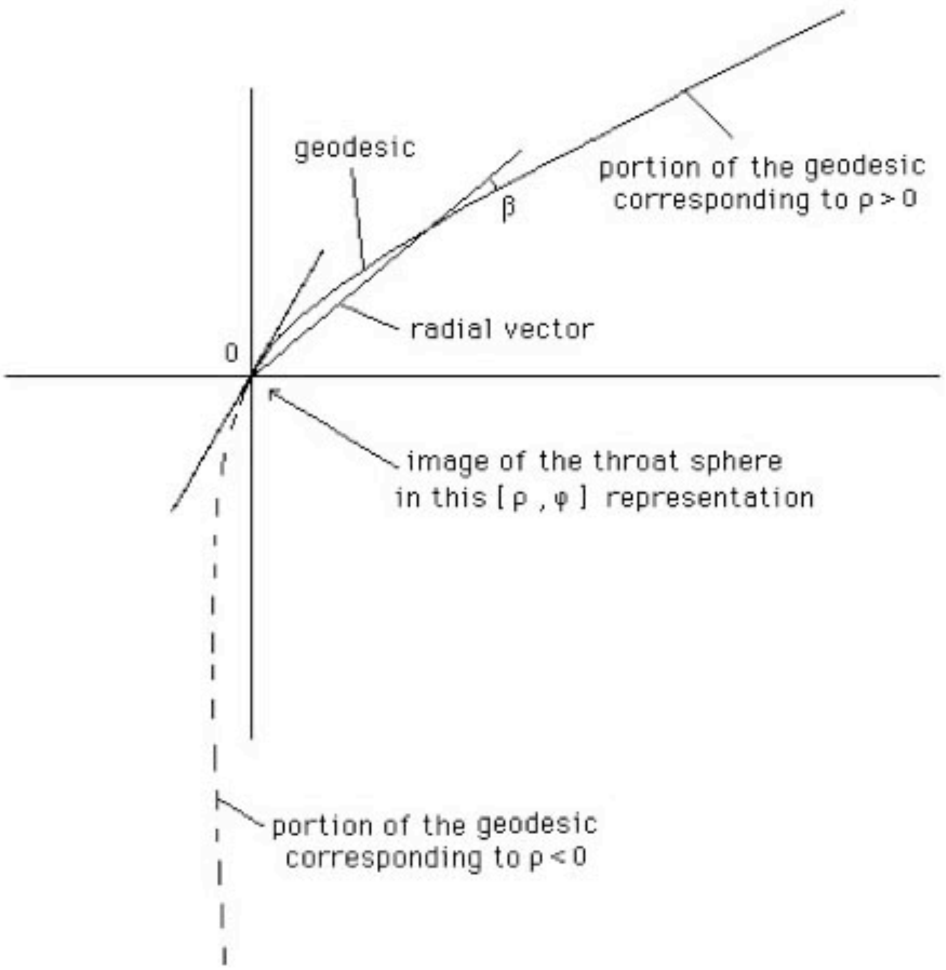
$$ds^2 = \frac{Log\, ch\rho}{1 + Log\, ch\rho} c^2 dt^2 - \frac{1 + Log\, ch\rho}{Log\, ch\rho} R_s^2\, th^2\rho\, d\rho^2 - R_s^2\,(1 + Log\, ch\rho)^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)$$

Il aurait constaté que cette expression ne lui posait aucun problème particulier, toutes les variables pouvant prendre toutes les valeurs possibles dans $\Re$. On se souvient que ρ est alors un nombre, positif ou négatif.

Première remarque : pour les valeurs élevées de ρ, en valeur absolue, la métrique devient Lorentzienne. Il semble alors logique de se dire que pourrait représenter « l'espace » et que cette description indique que la solution se réfèrerait à un objet géométrique situé dans un espace de Minkowski, dans le « vide ».

Autre remarque : pour des valeurs « assez grandes » de ρ les géodésiques rejoignent les côniques correspondant à des trajectoires Newtoniennes. Et de retrouver l'avance du périhélie de Mercure et l'effet de lentille gravitationnelle due à une masse M.

Mais que dire du comportement des géodésiques qui plongent dans le point O et passent ρ en négatif ? Voici ces géodésiques :



(plane, $\theta = \pi/2$) geodesical path in a $[\ \rho , \varphi\ ]$ representation

L'image de ce point O est, en représentation $\{ t , \rho , \theta , \varphi \}$ la sphère de Schwarzschild. Quand la géodésiques en parviennent en O elle se plonge en $\rho < 0$. Mais ceci correspond à r se remettant à croître ce qui fait que dans cette représentation la particule témoin donnera l'impression de rebondir sur la sphère de Schwarzschild, pas d'y pénétrer.

On peut évoquer les critiques qu'on formulé des spécialistes de la relativité. Ils

estiment qu'en introduisant le changement de variable $r = R_s\,(1 + Log\,ch\,\rho\,)$ nous ne « couvrons pas une portion de l'espace temps », correspondant à 0 < r < Rs.
variable

Nous leur retournons la critique inverse :

- En mettant en œuvre le changement de variable et en décidant d'examiner ce qui se passe en r = 0 ils pointent leur attention sur une région qui n'appartient pas à l'hypersurface, à l'espace-temps.

C'est une « **ghost singularity** », une « **singularité fantôme** ».

Gilles proposait de l'appeler une « singularité noire » ou « dark singularity », laquelle trouverait alors sa place dans la « dark science ». .

Comme on n'a pas touché à la variable temps, pour un observateur distant une particule témoin met un temps infini à atteindre cette sphère de Schwarzschild, comme elle met un temps infini à la quitter. Il y a encore gel du temps, « arrêt sur image ».

Mais comme nous le montrerons par la suite ceci est encore lié à un choix particulier de cette variable temps.

Post Scriptum :

We can deal with the problem in a different way. Suppose that, in 1916, Swchwarzschild would have find his geometrical solution through a $\{t\,,\rho\,,\theta\,,\,\varphi\,\}$ set of coordinates. They are just « letters ». Then he would have found :

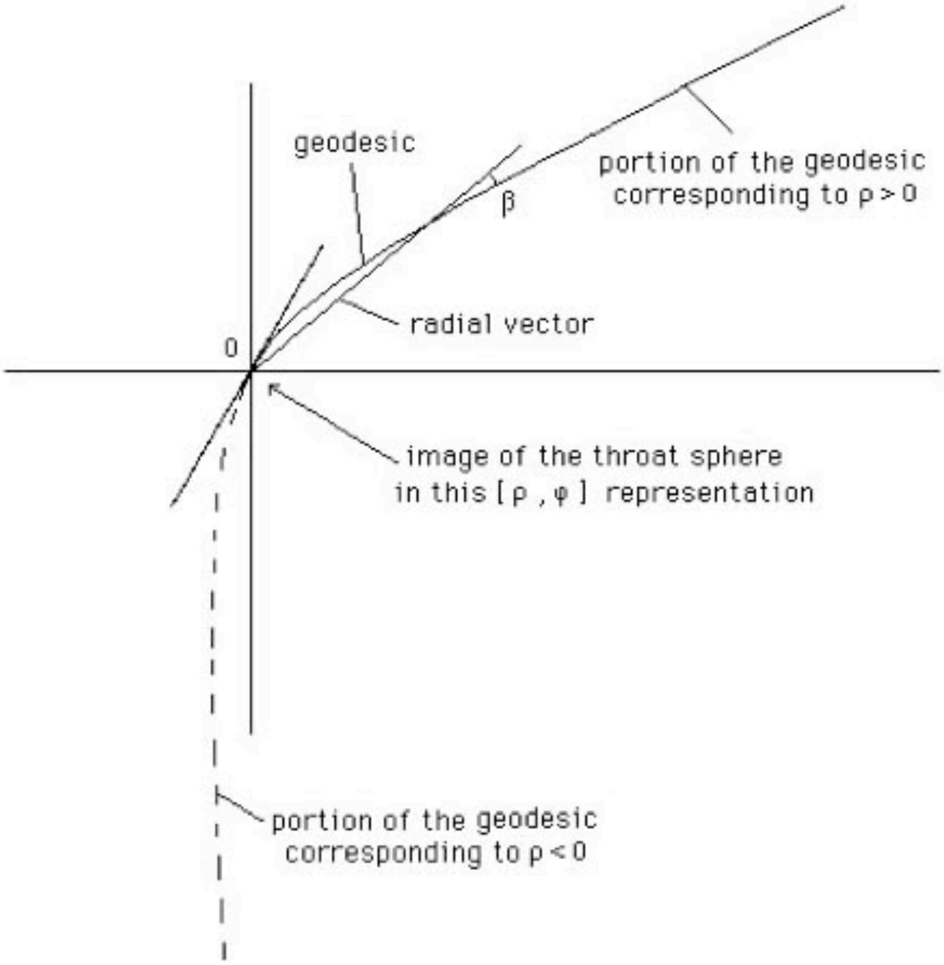
$$ds^2 = \frac{Log\,ch\rho}{1+Log\,ch\rho}\,c^2\,dt^2 - \frac{1+Log\,ch\rho}{Log\,ch\rho}R_s^2\,th^2\rho\,d\rho^2 - R_s^2\,(1+Log\,ch\rho)^2(\,d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2\,)$$

This line elements owns no mathematical pathology of any kind. The time variable t can vary from $-\infty$ to $+\infty$. Same thing for ρ .

Notice that ρ is a number.

So, what could be the physical meaning of such coordinates ?

Schwarzschild studys the assoc iated geodesic system and find the curves are regular. But some dive into the point ρ = 0, which reverse the space coordinate.



(plane, $\theta = \pi/2$) geodesical path in a $[\ \rho , \varphi\ ]$ representation

At large distance, with ρ >> 1 the metric identifies to Lorentz, to the geometry of void.

Some geodesics turn around the origin of coordinates. At large distance they identify to newtonian paths. So that such metric can fit newtonian dynamics.
But what about the vicinity of the O point ? What about this inversion of the ρ coordinate ?

Now we suppose that Schwarzschild tries the following coordinate change :

$$\rho = \arg ch\left(\frac{r}{R_s} - 1 \right)$$

Mad, insn't it ? No, it just the inverse of : $r = R_s\ (1 + Log\ ch\, \rho\ )$!!!

Notice that we get a single value of r for two values of ρ.

Notice that this solution, from the $\{t, \rho, \theta, \varphi\}$ space is withdrawn on the $\{t, r, \theta, \varphi\}$ 4D space. The geodesic sets are inscribes on a two fold cover of a bounded manifold.

The cannot nead with r < Rs values. From the above chance those values do not exist.

Then the matrix becomes.

$$ds^2 = (1 - \frac{R_s}{r})c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{(1 - \frac{R_s}{r})} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2$$

Thers is no problem with r = 0 point because this point does not belong to the hypersurface.

This suggests that the geodesic lines are extended in a $\rho < 0$ sector, while still corresponding to r > 0 values.

In a $\{t, \rho, \theta, \varphi\}$ descriptions the geodesics will look to « bounce » on the Schwharschild sphere.

Some could say :

- With the $r = R_s(1 + Log\, ch\, \rho)$ coordinate change you miss to describe a portion r < 0 of space time.

  We will say :

- With the $\rho = \arg ch\left(\frac{r}{R_s} - 1\right)$ coordinate change, if you deal with 0 < r < Rs and concentrate on this « singularity » you just put your eyes on something that does not belong the the hypersurface.

R = 0 is not a coordinate singularity but is *ghost singularirty.*
Which exists only in the imagination of the theoretivcian

(we could call it un « black singularity »)